

文章编号: 1000-7598-(2008) 08-2047-04

边坡稳定的非线性有限元分析

谭晓慧¹, 王建国², 王 印³

(1. 合肥工业大学 资源与环境工程学院, 合肥 230009; 2. 合肥工业大学 土建工程学院, 合肥 230009;
3. 同济大学 地下建筑与工程学院, 上海 200433)

摘 要: 基于有限元强度折减法, 进行了边坡的弹塑性材料非线性及大变形几何非线性分析, 并考虑了边坡的三维变形情况。在有限元分析中采用的是莫尔-库仑理想弹塑性模型, 大变形分析采用的是更新的拉格朗日法。均质边坡的算例分析表明, 有限元法与简化的毕肖普法的安全系数计算结果具有相同的规律, 即安全系数都随着黏聚力及内摩擦角的增加而增加, 随着重度的增加而减小, 但是, 各种有限元法的计算结果都比相应的毕肖普法的解要大, 亦即毕肖普法偏于安全。各种方法对应的安全系数由大到小的顺序依次是: 三维小变形有限元分析、二维大变形有限元分析、二维小变形有限元分析, 简化的毕肖普法, 前二者能更好地反映实际的边坡变形情况, 二者的安全系数值也十分接近, 因而是较好的方法。

关 键 词: 边坡稳定性; 有限元; 强度折减法; 材料非线性; 几何非线性

中图分类号: TU 432; TB 115

文献标识码: A

Nonlinear finite element analysis of slope stability

TAN Xiao-hui¹, WANG Jian-guo², WANG Yin³

(1. School of Resources and Environment Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 3. School of Underground Architecture and Engineering, Tongji University, Shanghai 200433, China)

Abstract: Based on the strength reduction method of finite element method, the elastoplastic material nonlinearity and large deformation geometrical nonlinearity of the slope are studied; and three dimensional deformation features of the slope are also considered. In the finite element analysis, the realistic elastoplastic model of Mohr-Coulomb is adopted; and the method for describing the large deformation characteristic of the soil is updated Lagrangian method. Through analyzing a homogeneous slope, it's concluded that there exists the same rule among the results of the finite elements and simplified Bishop method. The rule is that the factor of safety will become large if the cohesion and the internal friction angle become large, and it will become small with the increase of unit weight. However, the results of the finite element methods are always larger than the corresponding value of the simplified Bishop method, which means that the result of simplified Bishop method is inclined to conservative. The decreasing order of the four kinds of results of safety factor is F_s (three dimensional small deformation), F_s (two dimensional large deformation), F_s (two dimensional small deformation) and F_s (simply Bishop Method); among them the first two methods are the best one and their values are very close each other.

Key words: slope stability; finite elements; strength reduction method; material nonlinearity; geometrical nonlinearity

1 引 言

边坡稳定性分析是岩土工程中一个十分重要的问题。常用的边坡稳定性分析方法很多, 如各种极限平衡条分法、极限分析法、有限元法等, 其中有限元法由于能反映边坡岩土体的应力-应变关系, 考虑实际边坡体的复杂边界条件和采用一般土的材料模型, 因而是一种较好的研究边坡稳定性的方法^[1]。

边坡稳定的有限元分析主要分为以下两种方法: 一是基于滑面应力分析的方法, 这种方法先是根据有限元应力计算的结果求解假想滑面上的安全系数, 再求解所有可能滑面中安全系数的最小值, 类似于条分法; 二是基于强度折减的方法, 它不需事先假定滑动面的形状就可直接求得边坡的安全系数, 并可由变形图表示出滑面的大致位置, 而且它能利用现有大型有限元分析软件、无需重新编程,

收稿日期: 2006-11-17

基金项目: 安徽省教育厅青年基金项目 (No.2005jq1021); 安徽省水利厅科研项目。

作者简介: 谭晓慧, 女, 1971 年生, 博士, 副教授, 主要从事岩土力学与工程的教学与研究工作。E-mail: tantan9666@126.com

近年来这种方法受到了广泛的重视^[2-6]。

无论是基于滑面应力的分析方法,还是基于强度折减的分析方法,边坡稳定的非线性有限元分析大多数是假设边坡在荷载作用下发生的应变是微小的,即只研究了材料非线性问题,实际上边坡的破坏往往伴随着大变形条件。研究表明,当平均应变为 10 % 时,剪切带内的应变可高达 40 %^[7],因此应当进行边坡稳定的大变形几何非线性有限元分析。另一方面,目前边坡稳定的有限元分析仍多为二维分析,而真实的边坡破坏多为三维破坏,因此应当进行边坡的三维有限元分析。

2 边坡稳定的弹塑性材料非线性有限元分析

2.1 岩土体的弹塑性本构关系

描述岩土体的本构模型很多。在边坡稳定性分析中,由于理想弹塑性模型计算所得的边坡安全系数与传统的极限平衡法的计算结果具有可比性,因而边坡稳定的非线性有限元法一般都使用理想弹塑性模型,其增量形式为

$$d\sigma = D_{ep} d\epsilon = [D_e - D_p] d\epsilon \quad (1)$$

式中: $d\sigma$ 和 $d\epsilon$ 分别为应力增量和应变增量; D_e 、 D_p 、 D_{ep} 分别为弹性矩阵、塑性矩阵和弹塑性矩阵。

对于理想弹塑性体,可推导出 D_p 的通式^[8]:

$$D_p = \frac{D_e \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D_e}{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D_e \frac{\partial Q}{\partial \sigma}} \quad (2)$$

式中: F 和 Q 分别为材料的屈服函数和塑性势函数,一般假定塑性势函数与屈服函数有类似的形式,只是参数取值有所不同。本文采用莫尔-库仑理想弹塑性模型进行分析。

2.2 边坡稳定分析的有限元强度折减法

基于强度折减的有限元法 (strength reduction method, 简称 SRM) 产生于 20 世纪 90 年代,其基本原理是将边坡强度参数 c 、 φ (凝聚力、内摩擦角) 同时除以一个折减系数 F_s , 得到一组新的强度参数值 c' 、 φ' ; 然后以这组新的值作为输入参数进行有限元计算; 当计算至边坡达到极限状态时,对应的折减系数值就是边坡的最小安全系数。对 c 、 φ 值的具体折减公式如下:

$$c' = c / F_s \quad (3)$$

$$\varphi' = \arctan(\tan \varphi / F_s) \quad (4)$$

在基于强度折减的边坡有限元分析中,关键问题是边坡失稳判别标准的确定。目前的主要判别准则有: 以迭代过程不收敛为标准^[4]; 以某个特征点的位移为标准^[9]和以广义剪应变或广义塑性应变为标准^[6]。本文采用计算不收敛作为边坡失稳的判别标准,因为边坡失稳时滑体由稳定静止状态变为运动状态,同时产生很大的无限发展的位移,此时有限元程序无法从有限元方程组中找到一个既能满足静力平衡又能满足应力-应变关系和强度准则的解,即计算无法收敛。

3 边坡稳定的大变形几何非线性有限元分析

通常,大变形增量平衡方程因变量的参照状态不同而分为 TL (total lagrangian) 表述和 UL (updated lagrangian) 表述这两种方法,前者以 $t=0$ 的初始状态为参考构形,在以后所有时步内的计算都以此构形来定义,后者在时段 $[t, t+\Delta t]$ 的增量求解期间的所有变量均以这个时步的开始时刻 t 的状态作为参考构形来定义。这两种方法各有优缺点,本文采用 UL 描述方法进行求解。

当采用 UL 描述时,增量形式有限变形的虚功方程可写为

$$\int_{V_t} \delta \Delta E^T (\tau + \Delta S) dV_t = \int_{V_t} \delta (\Delta u)^T (p_t + \Delta p_t) dV_t + \int_{A_t} \delta (\Delta u)^T (q_t + \Delta q_t) dA_t \quad (5)$$

式中: τ 、 p_t 、 q_t 分别为 t 时刻的柯西应力、体力及面力; ΔS 、 ΔE 、 Δu 、 Δp_t 、 Δq_t 分别为 $[t, t+\Delta t]$ 时段内的应力、应变、位移、体力及面力的增量; V_t 及 A_t 分别表示体积及面积的积分域。

可以证明: 当采用 UL 描述时,应变增量 ΔE 可以分为线性部分 $(\Delta E)_{L0}$ 和非线性部分 $(\Delta E)_N$, 即

$$\left. \begin{aligned} \Delta E &= (\Delta E)_{L0} + (\Delta E)_N = (B_{L0} + \bar{B}_N) \Delta d^e = \bar{B} \Delta d^e; \\ \delta(\Delta E) &= (B_{L0} + B_N) \delta(\Delta d^e) = B \delta(\Delta d^e) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{L0} &= A^T N, \quad \bar{B}_N = \frac{1}{2} \Delta L G, \quad \bar{B} = B_{L0} + \bar{B}_N; \\ B_N &= 2 \bar{B}_N = \Delta L G, \quad B = B_{L0} + B_N \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: B_{L0} 和 $\bar{B}_N$ 分别为线性应变-位移转换矩阵和非线性应变-位移转换矩阵, Δd^e 为 $[t, t+\Delta t]$ 时段

内的单元节点位移增量; $\mathbf{N}$ 为形函数矩阵; $\mathbf{G}$ 为位移梯度矢量和单元节点位移矢量之间的转换矩阵; $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{L}$ 为微分算子矩阵; $\mathbf{d}$ 为节点位移向量。

根据虚位移的任意性, 再经单元组集, 可得离散系统的平衡方程为

$$\int_{V_0} \mathbf{B}^T (\mathbf{S} + \Delta \mathbf{S}) dV_0 = \bar{\mathbf{R}} \quad (8)$$

式中

$$\bar{\mathbf{R}} = \int_{V_t} [\mathbf{N}^T (\mathbf{p}_t + \Delta \mathbf{p}_t) dV_t + \int_{A_t} \mathbf{N}^T (\mathbf{q}_t + \Delta \mathbf{q}_t) dA_t] \quad (9)$$

是 $t + \Delta t$ 时刻相对于 t 时刻的位形定义的荷载的等效节点力向量。

将式 (6), (7) 代入式 (8), 并在几何及物理两方面进行线性化, 可得以切线刚度矩阵表达的增量平衡方程为

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{d} = \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{R} \quad (10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_T &= \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_S; \quad \mathbf{K}_0 = \int_{V_t} \mathbf{B}_{L0}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_{L0} dV_t; \\ \mathbf{K}_S &= \int_{V_t} \mathbf{G}^T \mathbf{M} \mathbf{G} dV_t; \quad \mathbf{R} = \int_{V_t} \mathbf{B}_{L0}^T \boldsymbol{\tau} dV_t; \\ \bar{\mathbf{R}} &= \int_{V_t} \mathbf{N}^T (\mathbf{p}_t + \Delta \mathbf{p}_t) dV_t + \int_{A_t} \mathbf{N}^T (\mathbf{q}_t + \Delta \mathbf{q}_t) dA_t \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中: $\mathbf{K}_T$ 为切线刚度矩阵; $\mathbf{K}_0$ 为小位移刚度矩阵; $\mathbf{K}_S$ 为初应力刚度矩阵 (几何刚度矩阵); $\mathbf{R}$ 为 t 时刻内力所产生的等效节点力矢量; $\bar{\mathbf{R}}$ 是 $t + \Delta t$ 时刻相对于 t 时刻的位形定义的荷载的等效结点力矢量; $\mathbf{D}_T$ 为材料的切线刚度矩阵; $\mathbf{M}$ 为应力矩阵。上述公式的详细推导见文献[10]和文献[11]。

4 算例分析

某均质边坡高 $H = 5$ m, 坡比 $V:H = 1:2$, 凝聚力 $c = 10$ kPa, 内摩擦角 $\varphi = 10^\circ$, 重度 $\gamma = 17.64$ kN/m³。文献[12]用条分法进行了边坡稳定性计算, 本文采用有限元法进行对比分析, 计算时取膨胀角 $\phi = \varphi = 10^\circ$, 弹性模量 $E = 10^2$ MPa, 泊松比 $\mu = 0.3$ 。安全系数的计算方法是强度折减法^[4]。

对于本算例, 本文分别采用二维及三维模型进行了边坡的稳定性分析, 其中二维问题又分为小变形和大变形两种情况。二维有限元分析和三维有限元分析采用单元类型分别是 8 节点四边形单元和 10 节点四面体单元。确定边坡剖面研究范围的方法是: 在水平方向, 自坡顶向坡外延伸 $2.5H$, 自坡脚向坡外延伸 $1.5H$; 在竖直方向, 由坡底向下延伸

H ^[5]。在三维有限元分析中, 坡体厚度 (即前后边界之间的距离) 由本文计算确定。图 1 表示的是三维有限元分析中边坡的网格剖分结果, 其边界条件是: 底面固定, 左、右边界限制左、右水平位移, 前、后边界限制前后水平位移。

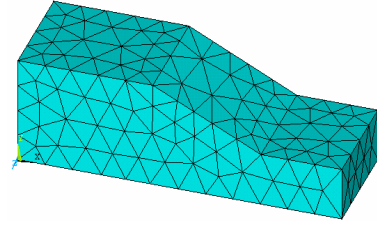


图 1 网格剖分图
Fig.1 Mesh of the slope

为了确定三维有限元分析中边坡的厚度, 本文研究了边坡模型厚度 T 与安全系数 F_s 的关系, 如图 2 所示, 其中横坐标表示模型厚度 T 与边坡高度 H 的比值, 纵坐标表示边坡的安全系数 F_s 。由图 2 可以看出, 三维计算模型中, 当 T 较小时, T 对安全系数 F_s 的计算结果有很大影响; 随着 T 的增加, F_s 也相应增加; 但当 $T/H \geq 1.0$ 时, 曲线近于平缓, 表示此时 T 值已足够大, 本文在三维有限元分析时取 $T = H$ 。

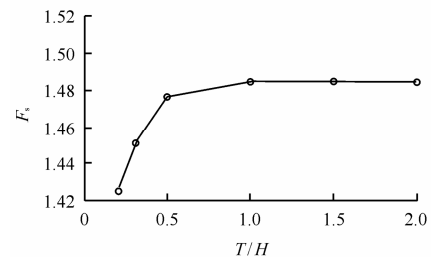


图 2 安全系数与模型厚度的关系
Fig.2 Relationship between safety factor and thickness

图 3 为各种方法的计算结果, 图中 BISHOP 表示由文献[12]的简化的毕肖普法所得的结果, FEM 为本文有限元分析的结果, 2D 和 3D 分别是 2 维和 3 维情况, small 和 large 分别表示小变形和大变形情况。由图可知, 本文有限元计算结果与文献[12]的条分法计算结果具有相同的规律, 即安全系数都随着黏聚力及内摩擦角的增加而增加, 随着重度的增加而减小, 而且各种方法对应的安全系数的差值较为固定。但是, 基于有限元强度折减法的边坡安全系数计算结果普遍比毕肖普法的相应解要大。在有限元分析中各种方法中, 基于常规的二维小变形假说所得的安全系数比毕肖普法的相应值稍大, 而考虑大变形及三维变形的有限元解则更

大, 在各种情况下安全系数的大小具有同样的规律, 即 $F_s(3D, \text{small}) > F_s(2D, \text{large}) > F_s(2D, \text{small}) > F_s(\text{Bishop})$, 其中 $F_s(3D, \text{small})$ 与 $F_s(2D, \text{large})$ 的值非常接近。

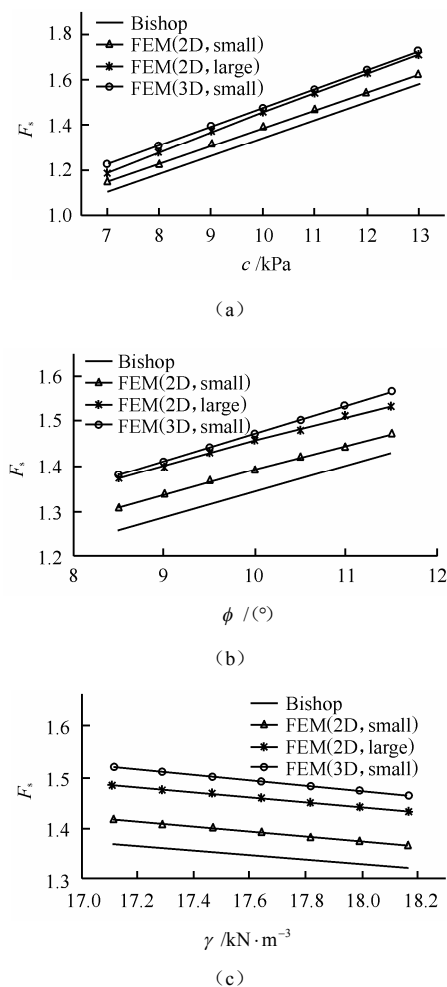


图3 安全系数与土工参数的关系

Fig.3 Relationship between safety factor and soil parameters

由于边坡的三维有限元分析能考虑真实存在的三维效应, 而大变形分析则能同时考虑边坡中存在的弹塑性材料非线性及大变形几何非线性性质, 因而二者的计算结果都是较为接近真实情况的。因此, 毕肖普法的安全系数解偏于安全。

5 结 语

本文基于有限元强度折减法, 进行了边坡的二维小变形有限元分析、二维大变形有限元分析及三维小变形有限元分析, 并将计算结果与条分法 (简化的毕肖普法) 进行了对比。结果表明, 安全系数的有限元解比条分法的相应解要大, 条分法的计算结果偏于安全; 在有限元法的各种求解结果中, 基于常规的小变形假设所得结果偏低, 考虑大变形性

质的二维有限元分析及三维小变形有限元分析之安全系数解十分接近, 二者对应的安全系数值最高。

参 考 文 献

- [1] 陈祖煜. 土坡稳定分析——原理、方法、程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003: 239—248.
- [2] MATSUI T, SAN K C. Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique[J]. *Soils and Foundations*, 1992, 32(1): 59—70.
- [3] SWAN C C, SEO Y K. Limit state analysis of earthen slopes using dual continuum/FEM approaches[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1999, 23: 1 359—1 371.
- [4] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. *Geotechnique*, 1999, 49(3): 387—403.
- [5] 张鲁渝, 郑颖人, 赵尚毅, 等. 有限元强度折减系数法计算土坡稳定安全系数的精度研究[J]. *水利学报*, 2003, (1): 21—27.
ZHANG Lu-yu, ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi, et al. The feasibility study of strength reduction method with FEM for calculating safety factors of soil slope stability[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2003, (1): 21—27.
- [6] 郑宏, 李春光, 李焯芬, 等. 求解安全系数的有限元法[J]. *岩土工程学报*, 2002, 24 (5): 626—628.
ZHENG Hong, LI Chung-guang, LEE C F, et al. Finite element method for the factor of safety[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, 24(5): 626—628.
- [7] 沈珠江. 应变软化材料的广义孔隙压力模型[J]. *岩土工程学报*, 1997, 19 (3): 14—21.
SHENG Zhu-jiang. Generalized pore water pressure model of strain softening material[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1997, 19(3): 14—21.
- [8] 龚晓南. 土塑性力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1990: 141—157.
- [9] 宋二祥. 土工结构安全系数的有限元计算[J]. *岩土工程学报*, 1997, 19 (1): 1—7.
SONG Er-xiang. Finite element analysis of safety factor for soil structures[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1997, 19(1): 1—7.
- [10] 王焕定, 吴德伦, 林家骥. 有限单元法及程序设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997: 391—420.
- [11] 王勰成, 邵敏. 有限单元法基本原理与数值方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988: 482—507.
- [12] MALKAWI A I H, HASSAN W F, ABDULLA F A. Uncertainty and reliability analysis applied to slope stability[J]. *Structural Safety*, 2000, 22: 161—187.